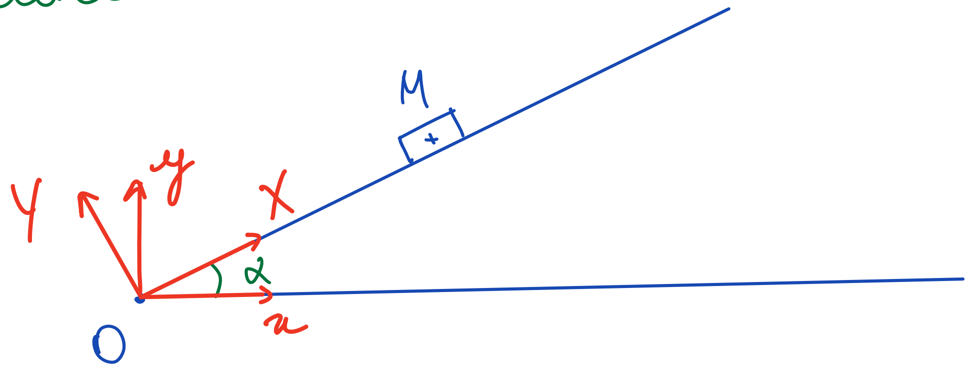
TD R7

Exercice 1



1) On considère la masse M dans le réf. terrestre supposé galiléen.

On se munit des repères cartésiens $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y})$ et $(O, \vec{u_X}, \vec{u_Y})$.
avec O la position initiale de la brique

La masse est soumise à :

* son poids $\vec{P} = -mg\vec{u_y} = -mg\cos\alpha\,\vec{u_Y} - mg\sin\alpha\,\vec{u_X}$
* la réaction du support $\vec{R} = R_N\vec{u_Y}$
  purement normale car on néglige les frottements

On lui applique le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

$/\vec{u_X}$: $m\ddot{X} = -mg\sin\alpha$

$$\ddot{X} = -g\sin\alpha$$

On intègre : $\dot{X} = -g\sin\alpha\, t + cste$ et $\dot{X}(0) = v_0 = 0 + cste$

Donc $\dot{X} = -g\sin\alpha\, t + v_0$

La brique s'arrête quand $\dot{x}(t_a) = 0$

i.e $\boxed{t_a = \dfrac{v_0}{g\sin\alpha}}$

On intègre à nouveau : $x(t) = -\frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2 + v_0 t$.

à $t = t_a$, $x(t_a) = -\frac{1}{2} g\sin\alpha\, t_a^2 + v_0 t_a$

$$= -\frac{1}{2} g\sin\alpha \frac{v_0^2}{(g\sin\alpha)^2} + v_0 \frac{v_0}{g\sin\alpha}$$

$$\boxed{x(t_a) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha}}.$$

La brique redescend car aucune force ne vient s'opposer au poids.

2) La masse est maintenant soumise à :

* son poids $\vec{P} = -mg\vec{u_y} = -mg\cos\alpha\,\vec{u_y} - mg\sin\alpha\,\vec{u_x}$
* la réaction du support $\vec{R} = R_N\vec{u_y} + R_T\vec{u_x}$

$R_N > 0$ et lors de la phase de montée, $R_T < 0$ car les frottements s'opposent au mouvement.

On a $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -mg\sin\alpha + R_T \\ m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases}$$

Or la masse reste sur le plan incliné, donc $\ddot{y} = 0$

Ainsi, $R_N = mg\cos\alpha$

Par ailleurs, la loi de Coulomb donne $|R_T| = \mu_d |R_N|$

ayant $R_T < 0$ et $R_N > 0$, on a $R_T = -\mu_d R_N$

$$= -\mu_d mg\cos\alpha.$$

Ainsi, $m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha$

$$\ddot{x} = -g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)$$

On intègre : $\dot{x}(t) = -g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)t + v_0$

La brique s'arrête à t_{a2} tq $\dot{x}(t_{a2}) = 0$

ie $\boxed{t_{a2} = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}}$

(On remarque $t_{a2} < t_a$, ce qui est logique !)

On intègre à nouveau : $x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)t^2 + v_0 t$

La masse a donc parcouru à $t = t_{a2}$:

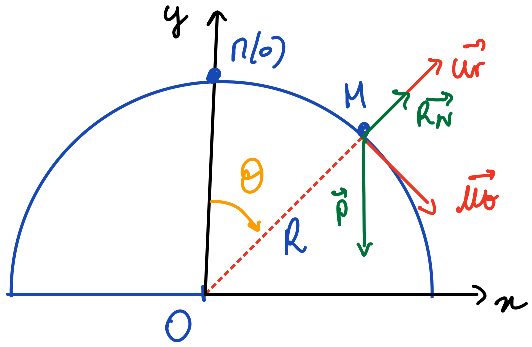
$$x(t_{a2}) = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g(\sin\alpha + \mu_d\cos\alpha)}$$

$(< x(t_a))$

3)

Exercice 2

Astuce : sur le schéma, prendre θ plutôt petit angle (très $\neq 45°$)



On se place dans le ref terrestre sup. gal.

On étudie le mvt du pt M.

1) Le point M est soumis à : * son poids $\vec{P} = -mg\vec{u_y}$

$$= -mg\cos\theta\,\vec{u_r} + mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$$

* la réaction de l'igloo $\vec{R} = R_N\,\vec{u_r}$ $\quad R_N > 0$

Appliquons le PFD à M :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$m\left(-R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}\right) = -mg\cos\theta\,\vec{u_r} + mg\sin\theta\,\vec{u_\theta} + R_N\vec{u_r}$$

2) $$\begin{cases} /\vec{u_r} & -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N \\ /\vec{u_\theta} & mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \end{cases}$$

$$g'(x)\times f(g(x)) = \left(F(g(x))\right)'$$

On a $\quad R\ddot{\theta} = g\sin\theta \quad = \dfrac{dv}{dt}$

$\sin(\theta(t))$

Astuce $\times\dot{\theta}$

$$R\ddot{\theta}\dot{\theta} = g\dot{\theta}\sin\theta \qquad u'(x)\times u(x) = \left(\frac{u^2}{2}\right)'$$

On intègre : $\quad \dfrac{1}{2}\underbrace{R\dot{\theta}^2}_{=\frac{v^2}{R}} = -g\cos\theta + \text{cte}$ $\quad$ ⚠ à ne pas oublier !

or à $t=0$: $\quad 0 = -g\cos 0 + \text{cte} \Rightarrow \text{cte} = g$

Ainsi $\quad \boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{R} = g(1-\cos\theta)} \qquad \boxed{v = \sqrt{2Rg(1-\cos\theta)}}$

Par ailleurs, on a $-m \underbrace{R\dot{\theta}^2}_{\frac{v^2}{R}} = -mg\cos\theta + R_N$

Ainsi $-m \dfrac{2\cancel{R}g(1-\cos\theta)}{\cancel{R}} = -mg\cos\theta + R_N$.

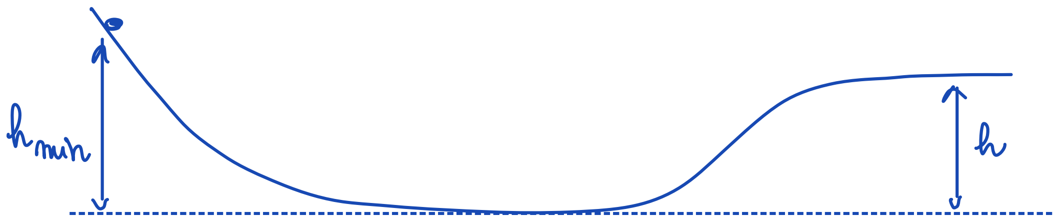
$$R_N = -2mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta$$
$$= mg(-2 + 2\cos\theta + \cos\theta)$$
$$\boxed{R_N = mg(-2 + 3\cos\theta)}$$

3) Le contact cesse pour θ_c tq $R_N = 0$

On a donc $mg(-2 + 3\cos\theta_c) = 0$

$$3\cos\theta_c = 2$$
$$\cos\theta_c = \frac{2}{3}$$
$$\theta_c = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = \underline{48°}$$

Exercice 3



1) On considère le mvt d'une masse m dans le réf. terrestre supposé galiléen.

Elle est soumise à : * son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

* la réaction du support $\vec{R}_N$ normale au support car on néglige les frottements.

Seul le poids $\vec{P}$ travaille et le poids est une force conservative, le mouvement est donc conservatif et l'énergie mécanique du syst. se conserve donc.

Ainsi $\mathcal{E}_m(\Pi) = \mathcal{E}_{m0}$

A $t=0$, $\mathcal{E}_{m0} = \frac{1}{2} m \times 0^2 + mgh_{min}$ (on prend l'origine de l'énergie pot. de pesanteur au niveau le plus bas et on considère un axe montant)

On veut pouvoir accéder à la hauteur h.

Autrement dit, il existe une vitesse pour laquelle

$$\mathcal{E}_{m0} = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$$

On a donc

$$mgh_{min} = \frac{1}{2} m v^2 + mgh$$

$$mgh_{min} - mgh = \frac{1}{2} m v^2 \geq 0$$

Donc

$$h_{min} - h \geq 0$$

$$\underline{h_{min} \geq h}$$

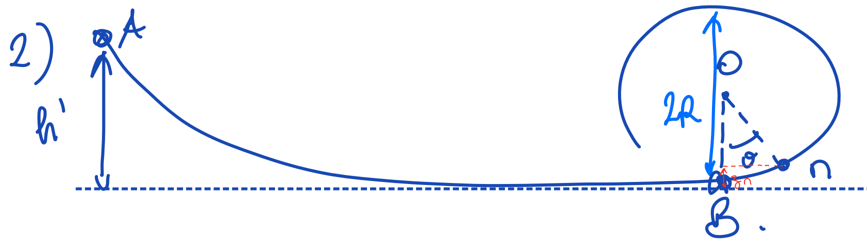
Ou la hauteur représente une barrière de potentiel $\mathcal{E}_{p\,barr} = mgh$

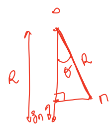
Pour la passer, il faut $\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{p\,barr}$

ie $mgh_{min} \geq \mathcal{E}_{p\,barr} = mgh$

$h_{min} \geq h$.

2)





$\cos\theta = \frac{R - z_n}{R}$

$R\cos\theta = R - z_n$

$z_n = R - R\cos\theta$
$= R(1-\cos\theta)$

Si on lâche la bille à $h' = 2R$, alors au sommet du looping, la vitesse sera nulle (car $\mathcal{E}_m = cste = mgh'$ (EI)

or si la vitesse est nulle au sommet, $= \frac{1}{2}mv^2 + mg2R$ (sommet)

alors, la masse ne peut que tomber. si $h' = 2R$, $\frac{1}{2}mv^2 = 0$.
$\rightarrow v = 0$)

3). On applique le TEM sous forme intégrale entre A et B :

$$\mathcal{E}_{m_B} - \mathcal{E}_{m_A} = 0$$

or $\mathcal{E}_{m_A} = mgh' + 0$

$\mathcal{E}_{m_B} = 0 + \frac{1}{2}m v_0^2$!!

cf origine choisie (Q1)

Ainsi $\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 - \cancel{m}gh' = 0$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh'}}$$

On applique le TEM intégrale entre B et n

$$\mathcal{E}_{m(n)} - \mathcal{E}_m(B) = 0$$

$\mathcal{E}_m(n) = \frac{1}{2}m\,v(\theta)^2 + mg z_n = \frac{1}{2}m v(\theta)^2 + mgR(1-\cos\theta)$!!

$\mathcal{E}_m(B) = \frac{1}{2}m v_0^2$

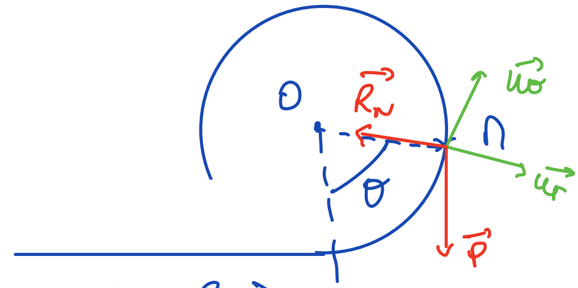
Donc $\frac{1}{2} \cancel{m} v(\theta)^2 + \cancel{m} g R (1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2$

$$v(\theta)^2 = v_0^2 - 2gR(1-\cos\theta)$$

$$\boxed{v(\theta) = \sqrt{v_0^2 + 2gR(\cos\theta - 1)}}$$

4) On applique le PFD au point M :

$$m\vec{a} = \vec{R_N} + \vec{P}$$



$/\vec{u_r}$: $m\vec{a}.\vec{u_r} = \vec{R_N}.\vec{u_r} + \vec{P}.\vec{u_r}$

$\left(-mR\dot{\theta}^2\right)$

$$-m\frac{v(\theta)^2}{R} = -R_N + mg\cos\theta \qquad \text{avec } R_N > 0$$

$$R_N = mg\cos\theta + m\frac{v(\theta)^2}{R}$$

Donc $\vec{R_N} = -\left(mg\cos\theta + m\frac{v^2(\theta)}{R}\right)\vec{u_r}$

$$= -\left(mg\cos\theta + m\frac{v_0^2}{R} + m\,2g(\cos\theta - 1)\right)\vec{u_r}$$

$$\boxed{\vec{R_N} = -\left(mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{v_0^2}{R}\right)\vec{u_r}}$$

5) La masse quitte le looping si R_N s'annule.

On cherche donc h' de façon à ce que $\forall\theta\ R_N(\theta) > 0$

On a $R_N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{v_0^2}{R}$

Or $v_0 = \sqrt{2gh'}$

Donc $R_N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2) + m\frac{2gh'}{R}$

On veut $\cancel{mg}(3\cos\theta - 2) + \cancel{m}\frac{2\cancel{g}h'}{R} > 0 \quad \forall\theta.$

$$h' > \underbrace{\frac{R}{2}(2 - 3\cos\theta)}$$

or $\frac{R}{2}(2 - 3\cos\theta) \leqslant \frac{R}{2}\left(2 - 3\times(-1)\right) = \frac{5}{2}R$

Ainsi, si $h' \geqslant \frac{5}{2}R$, alors $h' \geqslant \frac{R}{2}(2 - 3\cos\theta)\ \forall\theta$.

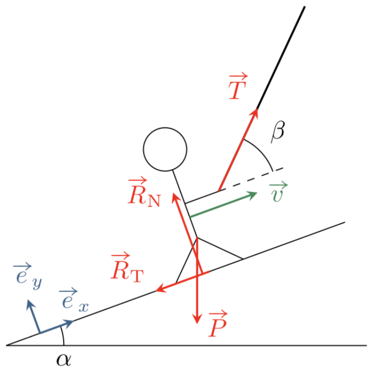
On a donc $h'_{min} = \frac{5}{2}R$ (c'est bien plus grand que $2R$)

Exercice 4

On doit d'abord faire quelques hypothèses. On supposera que le câble avance à vitesse constante et que le nombre de personnes accrochées est toujours le même : dès qu'une personne arrive, une autre personne saisit une perche en bas de la pente. On suppose aussi que le skieur est déjà à la vitesse du câble lorsqu'il l'attrape (élan). Cela permet d'étudier un seul skieur en milieu de montée et de multiplier la puissance obtenue par le nombre de skieurs prenant le câble en même temps.

La puissance du moteur doit être telle qu'elle puisse entraîner tous les skieurs. L'approche probablement la plus simple consiste donc à commencer par déterminer la puissance motrice nécessaire pour tirer un skieur de masse m à une vitesse constante égale à la vitesse du câble, v

Étudions le skieur dans le référentiel terrestre, considéré galiléen. Il est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction de la piste $\vec{R} = \vec{R}_\mathrm{N} + \vec{R}_\mathrm{T}$ et à la force de traction $\vec{T}$ du câble auquel il s'attache.



Calculons leur puissance.

- ▷ Par définition, on note $\mathcal{P}_1 = Tv\cos\beta$ la puissance exercée par le câble sur le skieur.
- ▷ Puissance développée par le poids :
$$\mathcal{P}(\vec{P}) = m\vec{g}\cdot\vec{v} = -mgv\sin(\alpha)$$
- ▷ Puissance développée par la réaction normale : $\mathcal{P}(\vec{R}_\mathrm{N}) = 0$ car elle est orthogonale à $\vec{v}$.
- ▷ Puissance développée par la réaction tangentielle : on ne peut que dire que $\mathcal{P}(\vec{R}_\mathrm{T}) = -R_\mathrm{T}v$ mais c'est ensuite plus compliqué car $\vec{R}_\mathrm{T}$ est a priori inconnue.

Il nous faut donc déterminer $\vec{R}_\mathrm{T}$. Comme le mouvement du skieur est par hypothèse rectiligne uniforme, alors par application de la loi de la quantité de mouvement,

$$\vec{P} + \vec{R}_\mathrm{N} + \vec{R}_\mathrm{T} + \vec{T} = \vec{0}\,.$$

En la projetant sur l'axe y incliné, on en déduit

$$-mg\cos\alpha + R_\mathrm{N} + 0 + T\sin\beta = 0 \qquad \text{soit} \qquad R_\mathrm{N} = mg\cos\alpha - T\sin\beta\,.$$

D'après la loi de Coulomb du frottement,

$$R_\mathrm{T} = fR_\mathrm{N} = fmg\cos\alpha - f\frac{\mathcal{P}_1}{v\cos\beta}\sin\beta$$

d'où on déduit la puissance développée par la force tangentielle,

$$\mathcal{P}(\vec{R}_\mathrm{T}) = -fmgv\cos\alpha - f\mathcal{P}_1\tan\beta\,.$$

Comme le mouvement du skieur se fait à vitesse constante, alors la somme des puissances qu'il reçoit est nulle d'après le théorème de l'énergie cinétique. On en déduit

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{R}_\mathrm{N}) + \mathcal{P}(\vec{R}_\mathrm{T}) = 0$$

soit en remplaçant les puissances par leurs expressions

$$\mathcal{P}_1 - mgv\sin\alpha + 0 - fmgv\cos\alpha - f\mathcal{P}_1\tan\beta = 0 \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{P}_1(1 - f\tan\beta) - mgv(\sin\alpha + f\cos\alpha) = 0\,.$$

On en déduit alors

$$\mathcal{P}_1 = \frac{mgv(\sin(\alpha) + f\cos(\alpha)}{1 - f\tan(\beta)}$$

Il suffit alors de proposer des valeurs : on peut proposer $m = 70$ kg, $v = 5$ km/h, $\alpha = 15°$ pour une piste peu pentue et $\beta = 45°$
On obtient alors

$$\mathcal{P}_1 = 4.10^2 \text{ W}$$

Pour déterminer la puissance totale à fournir par le moteur, on peut faire l'hypothèse que les frottements internes aux mécanismes sont négligeables, si bien que toute la puissance fournie par le moteur sert à tracter les skieurs. On peut proposer 20 pour le nombre de skieurs aà la fois sur le remonte-pente. La puissance totale du moteur qui entraîne le remonte-pente est donc égale à :

$$\mathcal{P} = 20\mathcal{P}_1 = 8 \text{ kW}$$

Exercice 5

1). Dans un dee, la particule chargée n'est soumise qu'à un champ magnétique.
On sait qu'alors la trajectoire est circulaire.
Par ailleurs, on sait que la puissance de la force de Lorentz magnétique est nulle, ce qui implique que le mouvement est uniforme.

2) On considère la particule dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.
On applique le PFD : $m\vec{a} = \vec{F}_{magn} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$

En norme, on a alors $$m\frac{v^2}{R} = |q|\, v B$$ (car le mouvement est circulaire et uniforme)

Donc $$v = \frac{R|q|B}{m}$$

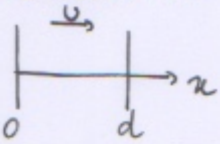
Or, on a $v = R\omega_c$ avec ω_c la pulsation cyclotron.

Donc $$\omega_c = \frac{|q|B}{m}.$$

Le temps mis pour faire un demi-tour est donc $\Delta t = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{m\pi}{|q|B}$.
Ce temps ne dépend pas de la vitesse du proton.

3) La tension doit changer à chaque fois que la particule fait un demi tour, donc
$$f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{|q|B}{\pi m}.$$

4) En appliquant le TEC sous forme intégrale entre l'entrée et la sortie de l'accélérateur :



$$\Delta E_c = W(\vec{F}_{elec}) = \int_{entrée}^{sortie} q\frac{U}{d}\,\vec{u}_x \cdot dx\,\vec{u}_x = qU.$$

A.N : $\Delta E_c = 1{,}6.10^{-19} \times 2{,}5.10^{3} = 4{,}10^{-16}$ J.

5). Plusieurs méthodes sont possibles :

① On applique le TEC entre l'entrée dans le cyclotron et la sortie du $n^{ème}$ demi tour (phase d'accélération comprise)

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m\, v_{sortie}^2 = n q U$$

Donc $\quad v_{sortie} = \sqrt{\frac{2nqU}{m}}$.

Si on souhaite $v_{sortie} = 15.10^3 \text{ km s}^{-1}$, il faut

$$n = \frac{m\, v_{sortie}^2}{2 \times qU} = \frac{1{,}6.10^{-27} \times (15.10^6)^2}{2 \times 1{,}6.10^{-19} \times 2{,}5.10^3} = 450 \text{ demi-tours}$$

donc 225 tours.

ou

② Soit v_n la vitesse de sortie du $n^{ème}$ demi-tour (phase d'accélération comprise).

On a $\quad \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{1}{2} m v_{n-1}^2 + qU$

ie $\quad v_n^2 = v_{n-1}^2 + \frac{2qU}{m}$

Posons $u_n = v_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $\frac{2qU}{m}$

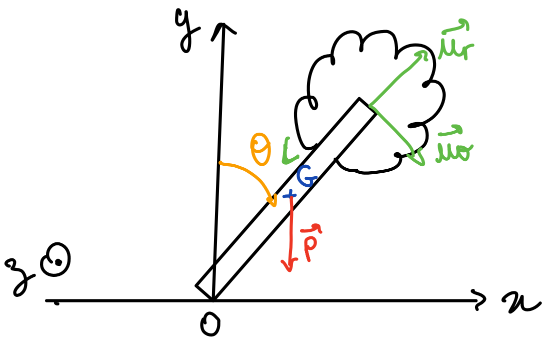
Ainsi $\quad u_n = u_0 + n\frac{2qU}{m} = n\frac{2qU}{m}$ car $u_0 = 0$.

On veut $u_n = v_{sortie}^2 = n\frac{2qU}{m}$ donc $n = \frac{m\, v_{sortie}^2}{2qU} = 450$ demi-tours.

6). On sait que $R = \frac{mv}{|q|B}$ (question 1)

donc $R = \frac{1{,}6.10^{-27} \times 15.10^6}{1{,}6.10^{-19} \times 0{,}1} = 1{,}5\, m$

Exercice 6



On considère l'arbre dans le réf. terr. sup. galiléen. Il est soumis à :

* son poids $\vec{P}$, appliqué en G
* la réaction du sol $\vec{R}$, appliqué en O

L'arbre est en rotation autour de l'axe (Oz)

1) On applique le TMC par rapport à (Oz) (axe de rotation de l'arbre)

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{R})$$

Calculons chaque terme :

* $\mathcal{L}_z = J\omega = -J\dot{\theta}$ (car θ ↑ dans le sens horaire qui est le sens négatif ici car $\vec{z}$ vient vers nous)

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = -J\ddot{\theta}$$

* $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u_z} = \left(\frac{L}{2}\vec{u_r} \wedge (-mg\vec{u_y})\right) \cdot \vec{u_z}$

2 options :
* $\vec{u_r} = \sin\theta\,\vec{u_x} + \cos\theta\,\vec{u_y}$
* $\vec{u_y} = \cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}$

$$= \left(\frac{L}{2}\vec{u_r} \wedge \left(-mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})\right)\right) \cdot \vec{u_z}$$

⚠ $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ est indirecte

Donc $\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} = \ominus\,\vec{u_z}$

$$= \frac{L}{2}(-mg)(-\sin\theta)(-\vec{u_z}) \cdot \vec{u_z}$$

$$= -\frac{L}{2}mg\sin\theta$$

* $\mathcal{M}_z(\vec{R}) = (\vec{OO} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{u_z} = 0$

$\in Oz$; point d'application

Ainsi, $$-J\ddot{\theta} = -\frac{L}{2}mg\sin\theta$$

$$\frac{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{3}\ddot{\theta} = \frac{\cancel{L}}{2}\cancel{m}g\sin\theta$$

$$\boxed{L\ddot{\theta} = \frac{3}{2}g\sin\theta}$$

2) $L \ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{3}{2} g \sin\theta \, \dot{\theta}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) \qquad = \frac{d}{dt}(-\cos\theta)$$

Astuce : redériver pour vérifier

$$\frac{d}{dt}(-\cos\theta) = \dot{\theta} \times \sin\theta \quad ✓$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \ddot{\theta}\,\frac{1}{2} \times 2 \times \dot{\theta} = \ddot{\theta}\dot{\theta} \quad ✓$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{3}{2} g \cos\theta\right)$$

On intègre : $\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3}{2} g \cos\theta + \text{cste}$ ⚠ à ne pas l'oublier

Pour déterminer la constante, on évalue à l'instant initial

Sachant que $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = \theta_0$

$$0 = -\frac{3}{2} g \cos\theta_0 + \text{cste} \Rightarrow \text{cste} = \frac{3}{2} g \cos\theta_0.$$

$$\frac{L}{\cancel{2}}\dot{\theta}^2 = \frac{3}{\cancel{2}} g (\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}}$$

3) On a $\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$

Méthode de séparation des variables

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} = dt$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant final

$$\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} = \int_0^{t_c} dt$$

$$\sqrt{\frac{L}{3g}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = \int_0^{t_c} dt$$

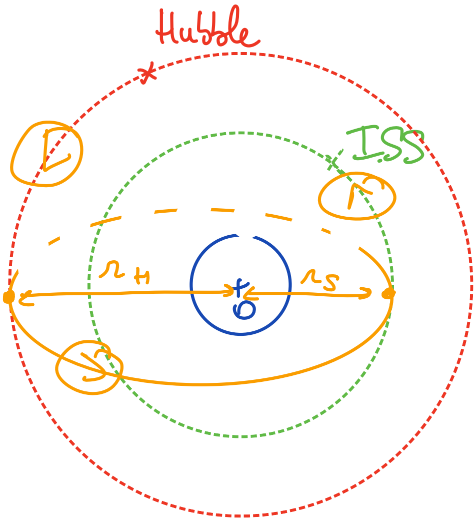
$$\sqrt{\frac{L}{3g}} \times 5,1 = [t]_0^{t_c} = t_c - 0$$

$$\boxed{t_c = 5,1\sqrt{\frac{L}{3g}}}$$

AN : pour $L = 10\,m$

$$t_c = 5,1 \times \sqrt{\frac{10}{30}} = 3\,s .$$

Exercice 7



1) On étudie l'astronaute de masse m dans le référentiel géocentrique sup. galiléen. Il est soumis :

$$\vec{F} = -\mathcal{G}\frac{m M_0}{(R_T+h)^2}\frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

avec h l'altitude de l'astronaute

Cette force est associée à une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{m M_0}{R_T+h}$$

2) On applique le PFD à l'astronaute : $m\vec{a} = \vec{F}$

Le mvt étant plan, on se place dans le repère polaire d'origine O :

$$m\vec{a} = -m\frac{v^2}{R_T+h}\vec{u_r}$$, car le mvt est circulaire et uniforme.

$/\vec{u_r}$: $$-m\frac{v^2}{R_T+h} = -\mathcal{G}\frac{m M_0}{(R_T+h)^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_0}{R_T+h}}$$

Or, $v = (R_T+h)\,\omega = (R_T+h) \times \frac{2\pi}{T}$

Ainsi, $$\sqrt{\frac{\mathcal{G} M_0}{R_T+h}} = (R_T+h)\frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{\frac{\mathcal{G} M_0}{4\pi^2} = \frac{(R_T+h)^3}{T^2}}$$

On a $$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{m M_0}{r} = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{\mathcal{G} M_0}{r}}\right)^2 - \mathcal{G}\frac{m M_0}{r}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m M_0}{r}$$ < 0 ☺ état lié

3) Pour Hubble : $\dfrac{\mathcal{G} M_0}{4\pi^2} = \dfrac{(R_T + h_H)^3}{T_H^2}$

Pour l'ISS : $\dfrac{\mathcal{G} M_0}{4\pi^2} = \dfrac{(R_T + h_S)^3}{T_S^2}$

$$\frac{(R_T + h_H)^3}{T_H^2} = \frac{(R_T + h_S)^3}{T_S^2} \Rightarrow T_S = T_H \left(\frac{R_T + h_S}{R_T + h_H} \right)^{3/2}$$

$$\underline{T_S = 93 \text{ min}}$$

Pour les vitesses :

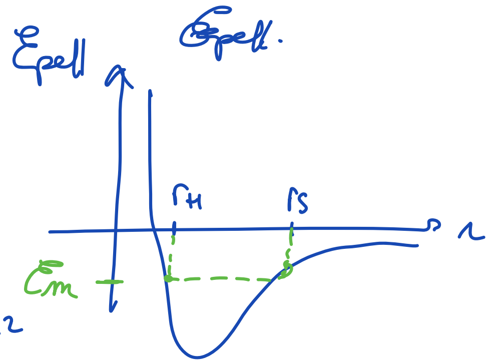
$$v_S = \frac{2\pi (R_T + h_S)}{T_S} = 7{,}7 \text{ km.s}^{-1}$$

$$v_H = \frac{2\pi (R_T + h_H)}{T_H} = 7{,}6 \text{ kms}^{-1}$$

5). $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2} m v^2 - \mathcal{G} \dfrac{m M_0}{r} = \dfrac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\dfrac{1}{2} m \dfrac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \dfrac{m M_0}{r}}_{\mathcal{E}_{peff}}$

$\mathcal{E}_m$ est constante et

$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{peff}(r_H) = \mathcal{E}_{peff}(r_S)$



$\mathcal{E}_{peff}(r_H) = \dfrac{1}{2} m \dfrac{C^2}{r_H^2} - \mathcal{G} \dfrac{m M_0}{r_H} = \mathcal{E}_m$

$\downarrow \times r_H^2$

Ainsi $\dfrac{1}{2} m C^2 - \mathcal{G} m M_0 r_H = \mathcal{E}_m r_H^2$

ie $\mathcal{E}_m r_H^2 + \mathcal{G} m M_0 r_H - \dfrac{1}{2} m C^2 = 0$

On a également $\mathcal{E}_m r_S^2 + \mathcal{G} m M_0 r_S - \dfrac{1}{2} m C^2 = 0$

<u>Rappel</u> : si x_1 et x_2 sont racines de $ax^2 + bx + c = 0$

alors $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

$\left(x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et } x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$

r_H et r_S sont racines du polynôme $E_m x^2 + \mathcal{G} m M_0 x - \frac{1}{2} m C^2 = 0$

Donc $r_S + r_H = - \frac{\mathcal{G} m M_0}{E_m}$

Donc au final $\boxed{E_m = - \frac{\mathcal{G} m M_0}{r_S + r_H}}$

6) $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \mathcal{G} \frac{m M_0}{r}$

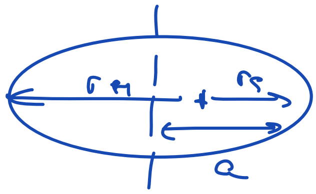
À l'apogée : $r = r_H$

Donc $- \mathcal{G} \frac{m M_0}{r_S + r_H} = \frac{1}{2} m v_a^2 (!) - \mathcal{G} \frac{m M_0}{r_H}$

$$v_a^2 = 2 \mathcal{G} M_0 \frac{r_S}{r_H (r_S + r_H)}$$

$\hookrightarrow$ or $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_0} = \frac{T_H^2}{r_H^3}$

$$\boxed{v_a^2 = \frac{8\pi^2}{T_H^2} \times \frac{r_S r_H^2}{(r_S + r_H)}} \rightarrow v_a = 7{,}5 \text{ km s}^{-1}$$



Au périgée, $r = r_S$

$$- \mathcal{G} \frac{m M_0}{r_S + r_H} = \frac{1}{2} m v_p^2 - \mathcal{G} \frac{m M_0}{r_S}$$

$$(\ldots)\ v_p^2 = \frac{8\pi^2}{T_S^2} \frac{r_S^2 r_H}{(r_S + r_H)} \qquad v_p = 7{,}7 \text{ km s}^{-1}$$

7) $\Delta t = \frac{T}{2}$ avec T la période de l'orbite elliptique.

3° loi Kepler $\frac{T^2}{\left(\frac{r_S + r_H}{2}\right)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G} M_0} = \frac{T_H^2}{r_H^3}$

$\Rightarrow \underline{\Delta t = 23 \text{ min}}$

Exercice 8

1) L'astéroïde n'est soumis qu'à la force de gravitation qui est conservative et centrale

Son mouvement est donc conservatif et plan

2) On a $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{r}$$

Dans le repère polaire de centre le centre de la Terre et contenant le mouvement (qui est plan),

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

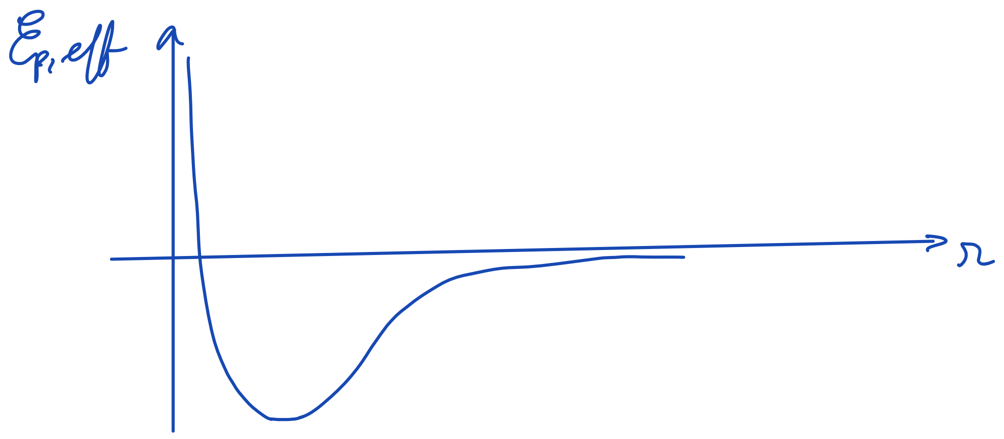
Donc $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{r}$$

Or, on a la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$

Donc $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m M_T}{r}$

On pose alors $\mathcal{E}_{p,eff} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G} \frac{m M_T}{r}$.



3) Quand l'astéroïde est à l'infini, son énergie potentielle est nulle, donc $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_0^2 > 0$ il s'agit donc d'un état de diffusion.

4) Il faut déterminer r_{min} et le comparer à R_T.

r_{min} est atteint quand $\dot{r} = 0$, donc quand $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,eff}$

Ainsi, on a $\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} \frac{C^2}{r_{min}^2} - \mathcal{G} \frac{\cancel{m} M_T}{r_{min}}$ $\times r_{min}^2$ $\times 2$

$$v_0^2 r_{min}^2 - C^2 + 2 \mathcal{G} M_T r_{min} = 0$$

Déterminons C :

C est une constante et vaut $\frac{\|\vec{\mathcal{L}}_O\|}{m} = \frac{\|\vec{OM} \wedge m\vec{v}\|}{m} = \|\vec{OM} \wedge \vec{v}\|$

C étant une constante, il suffit d'évaluer $\|\vec{OM} \wedge \vec{v}\|$ quand on veut. Faisons l'évaluation quand l'astéroïde est à l'infini :

$C = \|\vec{OM_\infty} \wedge \vec{v_0}\| = b\, v_0$ (la composante de $\vec{OM_\infty}$ colinéaire à $\vec{v_0}$ disparaît avec le produit vectoriel)

Au final : $r_{min}^2 + 2\mathcal{G} \frac{M_T}{v_0^2} r_{min} - b^2 = 0$

On a alors $r_{min} = -\mathcal{G}\frac{M_T}{v_0^2} + \sqrt{\mathcal{G}^2 \frac{M_T^2}{v_0^4} + b^2}$ $= 5.10^6 \, m$

$< 6.10^6 \, m$ rayon de la Terre

$\Rightarrow$ L'astéroïde va s'écraser !